

SCUDEM CHALLENGE 2019: PROBLEM C

Team: Daniel Kiša, Daniel Kunz, Adam Kyjovský

Coach: Jan Franců

School: Brno University of Technology

Zadání problému

Modelovaná situace se týká populace běláška zelného a parazitických vosiček z rodu *Trichogramma*. Bělásci při rozmnožování používají chemické signály. Feromon samičky láká samečky, oproti tomu feromon jednoho samečka odpuzuje ostatní samečky. Zároveň však látka sameččího feromonu (benzylchlorid) láká dva druhy parazitických vosiček k místu páření. Vosičky kladou svoje vajíčka dovnitř vajíček běláška, těmi se následně vylíhnuté larvy krmí. Hladina sameččího feromonu tudíž vytváří dva protichůdné nátlaky na populaci bělášků. Pro samičky vysoká hladina benzylchloridu znamená, že může klást vajíčka v klidu bez obtěžování ostatních samců, to ale zároveň způsobí přilet více parazitických vosiček.

Úkolem je sestavit matematický model (pomocí diferenciálních rovnic) popisující tuto situaci, diskutovat rovnováhu systému a dlouhodobé dopady.

1 Zvolený model, jeho předpoklady a výsledky

Zvolený model zkoumá změnu populací běláška a vosiček v čase, přičemž interakce těchto dvou druhů je modelována pomocí třetí proměnné symbolizující počet běláškem nakladených vajec. Dostáváme tak systém tří diferenciálních rovnic.

Předpokládáme, že přírůstky populací běláška (resp. vosiček) jsou přímo úměrné počtu nenapadených vajec (resp. napadených vajec), a že jejich úbytek je přímo úměrný jejich populacím. Jelikož dotyčný druh je v rámci jednoho pářícího období monogamní, předpokládáme, že přírůstek vajec je úměrný počtu oplozených samiček.

Funkce afrodiziaka vylučovaného samičkami je v modelu zanedbána, funkce anti-afrodiziaka vylučovaného samečkou je modelována tak, že čím více samečků benzylchlorid při páření vypouští, tím více roste pravděpodobnost, že nakladená vejce budou napadena parazitickými vosičkami. Poměr mezi pohlavími běláška je uvažován konstantní a roven 2.23:1 samečků ku samičkám[2]. Nejsou uvažována jednotlivá vývojová stádia bělášků a vosiček, v modelu se z vajec líhnou už dospělí jedinci. Dále model zanedbává fakt, že bělásci se nerozmnožují po celý rok, ale pouze v určitých obdobích.

Model je ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x} &= c_1 \delta e^{-p(\alpha+\beta r)} y - d_1 x \\ \dot{y} &= c_2 (1 - e^{-\gamma x}) (1 - \mu) x - \delta y \\ \dot{p} &= c_3 \delta (1 - e^{-p(\alpha+\beta r)}) y - d_2 p,\end{aligned}$$

kde x vyjadřuje populaci bělásků, y počet vajec a p populaci parazitických vosiček.

Parametry použité v modelu jsou zesumarizovány v následující tabulce. Většina hodnot byla zvolena pouze orientačně pro numerické řešení systému.

Parametr	Popis	Hodnota
c_1	podíl nenapadených vajec, která se zdárně vylíhnou v běláška	0.9
c_2	počet vajec nakladených jednou oplozenou samičkou	20
c_3	podíl napadených vajec, která se zdárně vylíhnou ve vosičku	1
d_1	úmrtnost bělásků	1
d_2	úmrtnost vosiček	1
r	podíl samečků používajících anti-afrodiziakum	
δ	rychlost líhnutí vajec	1
α, β	slouží k vyjádření schopnosti hledání vajec vosičkami	0.1, 0.9
γ	slouží k vyjádření pravděpodobnosti, že si každá samička najde partnera	1
μ	poměr pohlaví mezi samečkami a samičkami	0.69

Pro vysvětlení významu jednotlivých členů začneme u členu vyjadřujícího přírůstek vajec. Z předpokladu monogamie samiček plyne, že za jedno pářící období může dojít k maximálně $(1 - \mu)x$ oplození. $(1 - e^{-\gamma x})$ je rostoucí funkce nabývající hodnot mezi 0 a 1 a vyjadřuje pravděpodobnost, že dojde k oplození všech samic. Po vynásobení konstantou c_2 dostáváme celkový počet nakladených vajec.

Úbytek vajec $-\delta y$ se pak dělí na tři části - přírůstek bělásků v důsledku vylíhnutí, přírůstek vosiček v důsledku parazitace a případný úbytek vajec z externích důvodů. Funkce $e^{-p(\alpha+\beta r)}$ ve zmíněných přírůstcích vyjadřuje jakou část vajec vosička nenapadne. Pro velké hodnoty p se funkce blíží nule, jinak řečeno, pokud je počet vosiček velký, podaří se jim napadnout téměř všechna vejce. Parazitismus vosiček je silně ovlivněn parametrem r , který vyjadřuje podíl samečků běláška v populaci využívajících anti-afrodiziakum pro zvýšení šance svého rozmnožení. Čím větší tento podíl je, tím lépe vosička na běláscích parazituje. Parametr α vyjadřuje minimální schopnost vosiček parazitovat, tedy i bez pomoci sameččího feromonu. $\alpha + \beta$ pak tu maximální, tedy v případě všech samečků vypouštějících benzylchlorid.

Úbytky $-d_1 x$ a $-d_2 p$ jsou v tomto tvaru kvůli předpokladu lineární závislosti rychlosti vymírání populace na její velikosti.

2 Interpretace a diskuse výsledků

Vzhledem k nelinearitě systému rovnic byla úloha řešena pouze numericky v prostředí MATLAB. Konstanty pro výpočet byly zvoleny dle tabulky výše. Zkoumán byl vliv podílu samečků používajících anti-afrodiziakum na řešení systému. Při malých hodnotách r bylo řešení asymptoticky stabilní a po několika oscilacích se populace běláška a vosiček ustálily na nenulových hodnotách - oba druhy v systému žily v rovnováze. Při zvyšování parametru r se nejprve zvětšovalo oscilování řešení a trvalo déle, než se populace ustálily. Okolo hodnoty $r = 0.3$ se řešení kvalitativně změnilo a ekvilibrium přestalo být asymptoticky stabilní, řešení okolo něj soustavně kmitalo. Pro hodnoty nad $r = 0.33$ se stacionární bod přesunul do počátku, v systému tedy došlo k vymření obou druhů.

Výsledky lze interpretovat tak, že pro celkovou populaci běláška je výhodnější menší míra využívání benzylchloridu pro odrazení ostatních samečků. Feromon sice zvýší šanci jedince na úspěšné rozmnožení, v přítomnosti vosiček ale jeho vylučování působí od jisté meze katastrofálně a vede k vyhynutí celé populace.

Reference

- [1] "Chemical espionage on species-specific butterfly anti-aphrodisiacs by hitchhiking *Trichogramma* wasps." Martinus E. Huigens, Jozef B. Woelke, Foteini G. Pashalidou, T. Bukovinszky, Hans M. Smid and Nina E. Fatouros, *Behavioral Ecology*, Volume 21, Issue 3, May-June 2010, Pages 470–478, <https://doi.org/10.1093/beheco/arq007>
- [2] "Biology of *Pieris brassicae* (Linnaeus) (Lepidoptera: Pieridae) under Laboratory Conditions," Muhammad Aslam and Nazia Suleman, *Pakistan Journal of Biological Sciences*, 2: 199-200, 1999.
- [3] "Spojité modely v biologii," Josef Kalas, Zdeněk Pospíšil, 2001.